

# 20210322-0323-初步调研PDE文章（只浏览所以好多信息没看）

Lastly Modified by Max Liu, on 2021/03/23. Do not distribute it elsewhere!

1 谷歌differential equations image第一页的文献，都是老文献，所以先看完，再搜比较新的

- 1.1 Learning Partial Differential Equations for Computer Vision 【稀疏回归+不变量字典】 【经典林宙辰老师】
  - 1.2 Fourth-order partial differential equations for effective image denoising 【4阶pde+一堆Δ算子组合】 【韩国作者】
  - 1.3 Image Sequence Analysis via Partial Differential Equations 【找不着pde】 【法国的大学】 【速读看不懂】
  - 1.4 Partial differential equations and image processing 【梯度项+核函数】 【94年老文，真老了】
  - 1.5 Introduction to the Special Issue on Partial Differential Equations and Geometry-Driven Diffusion in Image Processing and Analysis 【不用看这文】 【98年TIP综述】
  - 1.6 Fourth-Order Partial Differential Equations for Noise Removal 【4阶pde+拉普拉斯组合】 【勉勉强强】
  - 1.7 Efficient image segmentation using partial differential equations and morphology 【扩散项+梯度项】 【启发了我扩散为什么常见】
  - 1.8 Segmenting skin lesions with partial-differential-equations-based image processing algorithms 【2阶pde+梯度曲率算子】 【极类似于1.7】
  - 1.9 Multi-sensor image fusion based on fourth order partial differential equations 【4阶pde+拉普拉斯组合】 【形式、目的与1.6基本一致】 【启发了扩散的又一个意义】
2. 按任务类型搜索，谷歌image denoising pde，总体感受是高引文很少，且多14年前的文，后面的好多水文看不下去
- 2.1 Image denoising: Learning the noise model via nonsmooth PDE-constrained optimization 【看不出pde类型】 【页数多、结论长的文果然难着】
  - 2.2 PDE-Based Random-Valued Impulse Noise Removal Based on New Class of Controlling Functions 【pde是扩散项（含速度）加上保真项，引入ENI去特定噪声】 【此文2章对扩散方程的历史详细介绍】 【启发了扩散项的改进】
  - 2.3 FCNet: A Fractional Optimal Control Network for Image Denoising 【分数阶方程保持记忆性】 【一看简介就知道质量高了】 【贾西西、张磊老师】

参考文献

## 1 谷歌differential equations image第一页的文献，都是老文献，所以先看完，再搜比较新的

### 1.1 Learning Partial Differential Equations for Computer Vision 【稀疏回归+不变量字典】 【经典林宙辰老师】

- [1] 谁的文章：林老师
- [2] 什么问题：特定视觉任务，可调整
- [3] 有动机否：pde引入平移和旋转不变性
- [4] 有无框架：从真实数据中学习pde系统以完成特定视觉任务的框架。原文第4、5页表(1)，式(1,2)
- [5] 什么模型：系统有两个pde，一个控制输出的演变，另一个辅助提取全局信息。两个pde都有至多二阶偏导。最终采用不变量稀疏回归，原文8、9页表(2)，式(7,8)
- [6] 方程类型：系数回归出来的。。原文8、9页表(2)，式(7,8)。实验也没给形式，所以看不出类型
- [7] 实验：5个：blur, edge detection, denoising, segmentation and object detection

注： [1] 一篇引文：P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12(7):629-639, 1990. [2] 思考：模型的图像多尺度自适应如何up [3] <https://zhouchenlin.github.io/Publications/Learning-Based-PDE-Sanya.pdf>，好像没发，百度搜到的是专利

### 1.2 Fourth-order partial differential equations for effective image denoising 【4阶pde+一堆Δ算子组合】 【韩国作者】

- [1] 谁的文章：不知道，像是韩国人
- [2] 什么问题：图像去噪、恢复
- [3] 有动机否：pde+能量泛函变分的方法，倾向于要么收敛到分段常值图像，要么会引入图像模糊（就是不太行）。去噪过程中可能会丢失有趣的精细结构
- [4] 有无框架：图像去噪中的变分模型，是无约束的四阶pde
- [5] 什么模型：提出4阶pde的解收敛到分块平面图像的分段平面性条件，指的是 $\Delta u$ 局部趋于0，即图像分块harmonic。也就是说，虽然pde似乎无约束，但是约束其实际在解收敛的条件里了
- [6] 方程类型：看不出类型，只知道一般形式里有 $\Delta$ 算子。一堆4阶组合出来的，怎么组合不知道。一般形式是原文3、4页式(2.6, 2.7)，一个例子是原文式(2.8, 2.9)
- [7] 实验：针对普通带噪图和纹理噪图做了去噪。实验结束后说四阶变分模型比二阶变分恢复更好；四阶模型很好地恢复了纹理区域，二阶模型倾向于更清晰地恢复大对比度的边缘

注： [1] 本文pde具体求解都是数值方法，有大量的差分近似 [2] 文章里说的无约束其实不明白哪里无约束，不管它 [3] 实验其实只是15 different models: combinations of five differential operators and three modulators, 我不懂，它也没给怎么combine的，应该是那个一般形式里的算子修改 [4] <http://emis.um.ac.il/journals/EJDE/conf-proc17/k2/abstr.html> [5] Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)

### 1.3 Image Sequence Analysis via Partial Differential Equations 【找不着pde】 【法国的大学】 【速读看不懂】

- [1] 谁的文章：反正是法国的大学的
- [2] 什么问题：图像序列分析，真的是要处理一堆图像。具体假定背景是静态的，获得运动分割和恢复的背景
- [3] 有动机否：基于pde单图去噪思路，拓展至图像序列应用。idea是同时处理恢复和运动分割
- [4] 有无框架：提出了一个理论上合理的优化问题，允许考虑同时处理（精确）背景恢复和运动分割。模型有理论，很多。证明了什么有界变分空间的存在性和唯一性。在此基础上，又提出了一种合适的半二次小化数值解法，并证明了该解法的收敛性和稳定性
- [5] 什么模型：仍然是最小设计的能量泛函，但是我真没找到pde，可能偷偷离散近似掉了。。。另外图像背景和运动区域indicator
- [6] 方程类型：我没找到pde，呵呵，搜了一下，正文就没出现过几次pde，就这还有101个引用
- [7] 实验：噪声合成数据和真实数据。只知道给的图片还可以

注： [1] pde在哪里？怕不是水文 [2] <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1008318126505> [3] Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1999

### 1.4 Partial differential equations and image processing 【梯度项+核函数】 【94年老文，真老了】

- [1] 谁的文章：法国的大学的作者
- [2] 什么问题：图像处理。。。
- [3] 有动机否：就是讲讲图像多尺度处理分析的公理 (axioms)、并扩展到彩色图像
- [4] 有无框架：无
- [5] 什么模型：全是理论，介绍了对于灰度图啊，彩图的几何、形态学不变量，讲了讲合理性
- [6] 方程类型：对于灰度图和彩色图给了俩，原文式(6,8)，但是好像只有梯度项和一个核函数
- [7] 实验：举了例子说明方程的效果，倾向于保留哪些像素特征

注： [1] <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/413266/> [2] Proceedings of 1st International Conference on Image Processing, 94年 [3] 本文结论推荐了Alvarez-Mazzorra PDE，据说能同时去噪和边缘增强

### 1.5 Introduction to the Special Issue on Partial Differential Equations and Geometry-Driven Diffusion in Image Processing and Analysis 【不用看这文】 【98年TIP综述】

注： [1] 1998年的TIP，至2021/03/22引用90 [2] <https://ieeexplore.ieee.org/document/661176> [3] 这个文章没什么意思，相当于是当年的小综述，介绍了当时各种pde结合图像问题的进展、方法。主要强调了这些方法好，多少都有图像上的意义。主要关注图像的演化和轮廓的演化 [4] 没讲pde的形式，只用 $\Gamma$ 代替

### 1.6 Fourth-Order Partial Differential Equations for Noise Removal 【4阶pde+拉普拉斯组合】 【勉勉强强】

- [1] 谁的文章：[一作](<https://scholar.google.com/citations?user=dFBuXf50LOkC&hl=en>)原西电毕业，现在在美Qualcomm工作似乎
  - [2] 什么问题：pure图像去噪
  - [3] 有动机否：本文的背景模型主要是2阶各向同性扩散方程，它们的结果可以平衡去噪和保持图像边缘信息，但是图片演化结果是分片块状的，有问题。4阶就是要avoid（原文说avoid，绝对了吧）这种分片块状case，同时平衡两点
  - [4] 有无框架：一类4阶pde
  - [5] 什么模型：模型还是pde作为条件优化能量泛函
  - [6] 方程类型：原文第2页，能量泛函是(4)式，pde是(17)式，似乎没有边界条件。能量泛函和拉普拉斯算子的单调函数有关，因此扩散的过程就是在先光滑化图像。pde不太明白是怎么导出来的，不过也是一堆拉普拉斯的组合
  - [7] 实验：拿经典的女人头实验。确实观察到2阶pde的分片块状很难看，不过4阶的分片planar虽然好点，但也缺乏真实性。可能就是这类方法的能量只和一些图像形态性质有关，带来的缺点
- 注： [1] 2000年TIP，<https://ieeexplore.ieee.org/document/869184>，至2021/03/22有994引 [2] 文章给了2阶方程导致分片块状的解释，因为二阶会在planar图像上为0，加上保持边界的项就是分片块状 [3] 一个小知识，扩散到底在于啥，大概就是演化过程中能量耗散变小了 [4] 个人认为本文的能量、pde构造只和拉普拉斯算子有关是性能不那么猛的关键

### 1.7 Efficient image segmentation using partial differential equations and morphology 【扩散项+梯度项】 【启发了我扩散为什么常见】

- [1] 谁的文章：似乎是德国作者，不认识
- [2] 什么问题：图像分割/增强边缘与去噪（预处理）
- [3] 有动机否：改进分水岭分割方法，指用pde演化预处理；基于pde方法的计算比较慢（它是这么说的），因此引入机制
- [4] 有无框架：利用了区合并&分水岭分割的pde，有两种pde，见模型。另外注意pde是预处理图像用的，然后再分水岭
- [5] 什么模型：2种pde。非线性各向同性扩散方程，加强边缘，增强对比度，边缘信息不足时用这个效果好；凸非二次变分图像恢复，去噪，与能量最小化有联系，去噪时用这个分割处理后分割效果好。具体还有trick，都可以利用AOS (additive operator splitting) 机制加快计算，这个不管
- [6] 方程类型：2（其实就1）种。第一种是非线性扩散，怎么来的不知道，看样子像是手动设计，有梯度项和扩散项，似乎是增强边缘信息，原文第2页式(1)；第二种是能量泛函诱导的，也有扩散项和梯度项，但是对去噪效果更好，原文第4页式(9)
- [7] 实验：文中总共几张图就是几个实验，主要是各个方法的对比，先分水岭和预处理再分割比较，以及两种pde的比较。除了数据量少没啥问题

注: [1] 2001年的The Journal of Pattern Recognition, 至2021/03/22引用量178, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320300001096> [2] 这个文章表示这个框架计算非常快, 线性复杂度; 且可用于任意维数据 [3] **小知识**, pde+变分的思路, 为什么是导出Euler-Lagrange方程后直接作为pde (导出一般就是扩散项!) ? 因为此方程=0意味着稳定态, 但是pde真的能收敛到这个稳定态么? 如本文式(9)

## 1.8 Segmenting skin lesions with partial-differential-equations-based image processing algorithms [2阶pde+梯度曲率算子] [极相似于1.7]

- [1] 谁的文章: 不认识, 只知道是明尼苏达ECE的
  - [2] 什么问题: 皮肤病变区域分割
  - [3] 有动机否: 把手动预处理的过程交给pde吧
  - [4] 有无框架: 智能诊断分割的框架。思路和上一篇文章一样, 先预处理再分割
  - [5] 什么模型: general预处理用上一篇文章的思路或者传统直方图方法; 针对毛发干扰预处理用数学形态学算子, 但是把腐蚀膨胀做成了pde, 这就很手动, 形式和梯度投影有关, 但不太直观。。。分割用active contours or snakes, 看起来和水平集基本一致, 做成了**能量泛函**, 然后用pde介导分割轮廓的演化
  - [6] 方程类型: 能量泛函是原文第2页式(8), 控制轮廓的pde是式(9)。泛函仍然是梯度和边界检测函数的复合, pde类型应该算2阶, 和梯度、曲率等有关
  - [7] 实验: 文中总共几张图就是几个实验, 主要是各个方法的对比, 先分水岭和先预处理再分割比较, 以及两种pde的比较。除了数据量少没啥问题
- 注: [1] 2000年的IEEE Transactions on Medical Imaging, 现在影响因子6.685, <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/875204>, 谷歌显示至2021/03/22引用量124 [2] 这个文章的分割思路和上一篇文章几乎一样! 这篇文章早一点, 且两篇文章均未引对方 [3] 曲率用梯度算的话, 其中有两个阶导, 所以应该是2阶pde

## 1.9 Multi-sensor image fusion based on fourth order partial differential equations [4阶pde+拉普拉斯组合] [形式、目的与1.6基本一致] [启发了扩散的又一个意义]

- [1] 谁的文章: 上交上电的作者
  - [2] 什么问题: 图像融合(多尺度/多模态), 目标是使源信息损失和融合伪影最小
  - [3] 有动机否: 图像融合的背景是需要多尺度图像充分获取/感知信息, 这样看这个问题挺nb
  - [4] 有无框架: 标题基于4阶pde的多传感器图像融合
  - [5] 什么模型: 从摘要看, 像是图像的分解, 第1步用4阶pde分解成所谓的一些近似图&一些细节图; 第2步对细节图PCA得最优权重; 第3步用权重融合一堆细节图; 第4步平均一堆近似图; 最后重新融合。具体融合不看, 发现本文是利用4阶pde, **直接用原文第2页式(2)迭代得到被扩散的图片就是近似图, 拿原图一减就是细节图**
  - [6] 方程类型: 本文FPDE是原文第2页式(1), 就是直接用的, 一堆拉普拉斯的组合, 和1.6的一模一样!
  - [7] 实验: 就是融合
- 注: [0] 本文记4阶pde为FPDE [1] 2017 20th International Conference on Information Fusion (Fusion), 谷歌说至2021/03/22引用量74, <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8009719> [2] 文章说第一次把(4阶)pde引入图像融合, 确实之前没见过这个应用 [3] 背景方法, 传统融合中的小波重构就是分解成分层的近似图和细节图 [4] 本文方法的优点, 解决了两个目标, 计算快, 以及没啥人工误生成的区域 [5] 为什么用二阶的扩散, 在同质区域行各向同性平滑, 同时保留非各向同性区域(边缘); 一个缺点是块状, 不真实, 还有一个是可能有误扩散出的人工区域, 你懂的

## 2. 按任务类型搜索, 谷歌image denoising pde, 总体感受是高引文很少, 且多14年前的文, 后面的好多水文看不下去

ps: since 2011, 共9180文; since 2017, 共3850文。

### 2.1 Image denoising: Learning the noise model via nonsmooth PDE-constrained optimization [看不出pde类型] [页数多、结论长的文果然难啃]

- [1] 谁的文章: 墨西哥的大学和剑桥的作者
  - [2] 什么问题: 全变分图像去噪 (从实验图像看是去噪)
  - [3] 有动机否: 图像中可能存在不同类型噪声分布, 对它们加权(加参)
  - [4] 有无框架: 全变分图像去噪, 提出非光滑pde约束的优化方法, 确定不同类型噪声分布的权重
  - [5] 什么模型: 说是优化(一般的loss)问题, 有TV正则以逼近最优解; 其中正则还有Huber结构; 用拟牛顿法和半光滑牛顿型算法求解, 数值计算最佳参数。但是我就不就是反分析法优化问题么, 只是本文讨论分析的太多了
  - [6] 方程类型: 很理论, 看不出来。只能从变分得到的E-L方程看, 有各种算子、积分的近似
  - [7] 实验: 好像就是整个几个图去去噪
- 注: [1] 谷歌引用量71, 应该是发在13年AIMS的Inverse Problems and Imaging刊上, 19年影响因子1.373, <http://www.aims.org/article/doi/10.3934/ipl.2013.7.1183> [2] 本文特点, 32页, 结论超长, 啰里啰嗦, 全文搜不到几个单词pde、partial, 懂了么 [3] 优点, 只知道几乎全文推导, 理论上有一些, 证明了优化问题最优解的存在性, 证明了解算子的可微性

### 2.2 PDE-Based Random-Valued Impulse Noise Removal Based on New Class of Controlling Functions [pde是扩散项(含速度)加上保真项, 引入ENI去特定噪声] [此文第2章对扩散方程的历史详细介绍] [启发对扩散项的改进]

- [1] 谁的文章: 中国作者, 都是天大的
  - [2] 什么问题: 图像去噪, 针对特殊噪声: 随机脉冲噪声
  - [3] 有动机否: 扩散方程中, 大多数以前的控制速度函数依赖于图像梯度, 以减少边缘像素处和周围的扩散。但是这导致在被脉冲噪声污染的噪声像素处的扩散减少, 意味着不能有效去除脉冲噪声。一个好的控制速度函数应该减少边缘像素处的扩散, 同时允许脉冲污染的噪声像素和内部像素处的扩散。所以定义了**ENI来区分三类像素**
  - [4] 有无框架: 框架即标题, 基于pde的方法, 且重新定义了controlling speed function和controlling fidelity (保真度) function。注意本文的pde是扩散项(含速度)加上保真项
  - [5] 什么模型: 利用ENI重新定义控制速度函数、控制保真度函数, 进而对三种像素选择性执行扩散和保真。前者真的**巧妙**, 原文第5页图(3)结合ENI的定义直接启发式得到合理的速度函数; 后者也类似, 抑制噪声像素的保真即可
  - [6] 方程类型: 此文第2章对**扩散方程的历史**详细介绍, 并把方程的形式都给出来了, 都是**扩散项的变体**, 比如4阶只需把二阶的梯度算子改成拉普拉斯
  - [7] 实验: 五张标准测试图像Lena、Peppers、Boat、Airplane和Bridge。每张图像都被不同噪声水平的随机脉冲噪声扰动
- 注: [1] 谷歌引用量59, 11年的TIP, <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5738338> [2] 本文框架的一个优点是, 可以拓展到其他pde去噪方法中 [3] 本文引入了一个概念, ENI, 是边缘像素、噪声像素和内部像素的缩写, 表示局部邻域中间质像素的数量。看了一下, ENI这个东西挺nb的, 是个标量, 文章第4页图(1)很清楚, 完美区分三类像素, 所以**思考分割模型能不能用ENI**? [4] 本文提到, 对扩散项有这样的改进方式: 控制扩散速度、扩散方向、添加保真度项、它们的组合

### 2.3 FOCNet: A Fractional Optimal Control Network for Image Denoising [分数阶方程保持记忆性] [一看简介就知道质量高了] [贾西西、张磊老师]

- [1] 谁的文章: 贾老师、张老师等
  - [2] 什么问题: 图像去噪
  - [3] 有动机否: 基于DnCNNs的方程解释, 改成分数阶方程; 分数阶方程似乎有长期记忆性
  - [4] 有无框架: FOCNet, 分数最优控制网络, 算是分数阶微分方程的离散化; 并加强多尺度特征交互加强网络
  - [5] 什么模型: 与框架一致, 求解分数最优控制(FOC)问题, 有不少理论保证。有DenseNet/动态网络的味道
  - [6] 方程类型: 分数阶方程, 原文第4页式(7), 好像就是条件pde变成了分数阶方程, 其它都是网络套的
  - [7] 实验: 很多, 有经典单图加多种噪声, 用多种模型; 还有数据集同样处理的
- 注: [1] 2019CVPR, [https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8738338orhttps://openaccess.thecvf.com/content/CVPR/2019/html/Jia\\_FOCNet\\_A\\_Fractional\\_Optimal\\_Control\\_Network\\_for\\_Image\\_Denoising\\_CVPR\\_2019\\_paper.html](https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8738338orhttps://openaccess.thecvf.com/content/CVPR/2019/html/Jia_FOCNet_A_Fractional_Optimal_Control_Network_for_Image_Denoising_CVPR_2019_paper.html) [2] 这个回去好好读读吧, 写点东西, 能不能融合DnCNNs、FOCNet、动态网络得到动态+残差+BN+分数阶方程。。。是不是在瞎搞。。。也没啥创意

## 参考文献

多为APA 7th格式

- [1] Lin, Z., Zhang, W., & Tang, X. (2008). Learning partial differential equations for computer vision. Peking Univ., Chin. Univ. of Hong Kong.
- [2] Kim, S., & Lim, H. (2009). Fourth-order partial differential equations for effective image denoising. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], 2009, 107-121.
- [3] Kornprobst, P., Deriche, R., & Aubert, G. (1999). Image Sequence Analysis via Partial Differential Equations. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 11(1), 5-26. <https://doi.org/10.1023/A:1008318126505>
- [4] A. Chambolle, "Partial differential equations and image processing," Proceedings of 1st International Conference on Image Processing, Austin, TX, USA, 1994, pp. 16-20 vol.1, doi: 10.1109/ICIP.1994.413266.
- [5] Caselles, V., & Morel, J. (1998). Introduction To The Special Issue On Partial Differential Equations And Geometry-driven Diffusion In Image Processing And Analysis. IEEE Transactions on Image Processing, 7(3), 269-273. <https://doi.org/10.1109/TIP.1998.661176>
- [6] You, Y. L., & Kaveh, M. (2000). Fourth-order partial differential equations for noise removal. IEEE Transactions on Image Processing, 9(10), 1723-1730. <https://doi.org/10.1109/83.869184>
- [7] Weickert, J. (2001). Efficient image segmentation using partial differential equations and morphology. Pattern Recognition, 34(9), 1813-1824. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0031-3203\(00\)00109-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0031-3203(00)00109-6)
- [8] Do Hyun, C., & Sapiro, G. (2000). Segmenting skin lesions with partial-differential-equations-based image processing algorithms. IEEE Transactions on Medical Imaging, 19(7), 763-767. <https://doi.org/10.1109/42.875204>
- [9] Bavirisetti, D. P., Xiao, G., & Liu, G. (2017, 10-13 July 2017). Multi-sensor image fusion based on fourth order partial differential equations. 2017 20th International Conference on Information Fusion (Fusion).
- [10] Juan Carlos De los, R., & Carola-Bibiane, S. (2013). Image denoising: Learning the noise model via nonsmooth PDE-constrained optimization. Inverse Problems & Imaging, 7(4), 1183-1214. <https://doi.org/10.3934/ipl.2013.7.1183>
- [11] Wu, J., & Tang, C. (2011). PDE-Based Random-Valued Impulse Noise Removal Based on New Class of Controlling Functions. IEEE Transactions on Image Processing, 20(9), 2428-2438. <https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2131664>
- [12] Jia, X., Liu, S., Feng, X., & Zhang, L. (2019, 15-20 June 2019). FOCNet: A Fractional Optimal Control Network for Image Denoising. 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR).